

מבוא מתמטי לפיזיקאים 1

פרק 31 - נושאים מתקדמים - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות.....1
2. זהויות עם פונקציות היפרבוליות.....3
3. נגזרות של פונקציות היפרבוליות.....4
4. הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות.....5
5. גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות.....6

הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

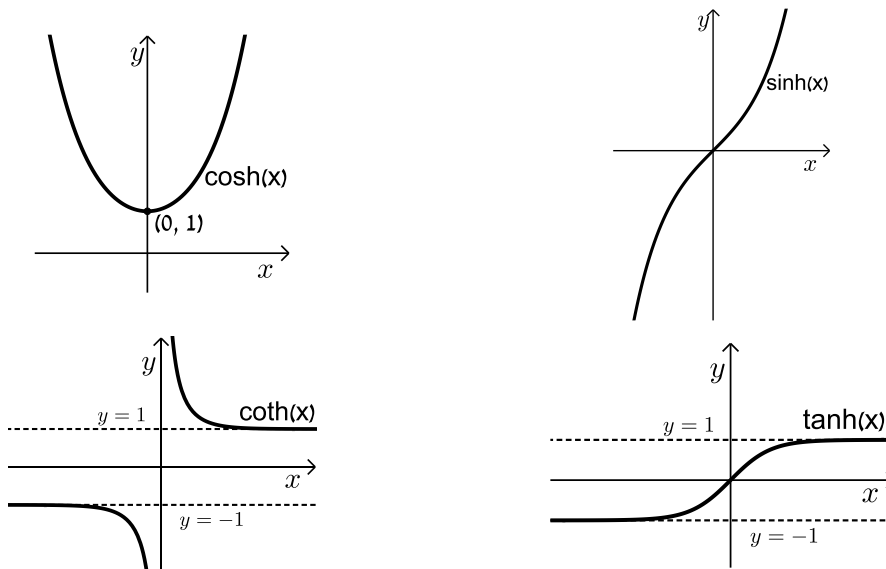
סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

תיאורים גרפיים



שאלות

(1) חשבו את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית $\sinh(x)$, עבור $x = 1$.

(2) נתון כי $\sinh(x_0) = -1$.

חשבו את ערכן של הפונקציות $\cosh(x_0)$, $\tanh(x_0)$ ו- $\coth(x_0)$.

(3) חשבו $\sinh(\ln 5)$.

(4) חשבו $\tanh(-3 \ln 2)$.

תשובות סופיות

(1) 1.175

$$\cosh(x_0) = \sqrt{2}, \tanh(x_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \coth(x_0) = -\sqrt{2} \quad (2)$$

(3) 2.4

$$-\frac{63}{65} \quad (4)$$

זהויות עם פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות

סינוס וקוסינוס היפרבוליים	טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים	ארגומנט שלילי
$\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$	$1 + \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\cosh(-x) = \cosh(x)$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$	$\coth^2(x) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(x)}$	$\sinh(-x) = -\sinh(x)$

סכום והפרש ארגומנטים

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$$

זהויות של ארגומנט כפול

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2 \sinh^2(x) + 1 = 2 \cosh^2(x) - 1$$

שאלות

(1) הוכיחו את הזהות $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$.

(2) הוכיחו את הזהות הכפולה $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}} = \frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$

בתחום $x \geq 0$.

(3) הוכיחו את הזהות $\cosh^4(x) - \sinh^4(x) = \cosh(2x)$.

(4) הוכיחו את הזהויות $\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות של פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות

$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$(\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$

שאלות

1 גזרו את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln x)$.

2 גזרו את הפונקציה $f(x) = \sinh(\tanh(x))$.

3 גזרו את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln(\sin x))$.

4 גזרו את הפונקציה $f(x) = \sinh^2(x^3)$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{\sinh(\ln x)}{x} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{\cosh(\tanh(x))}{\cosh^2(x)} \quad (2)$$

$$f'(x) = \sinh(\ln(\sin(x))) \cdot \cot(x) \quad (3)$$

$$f'(x) = 3x^2 \sinh(2x^3) \quad (4)$$

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

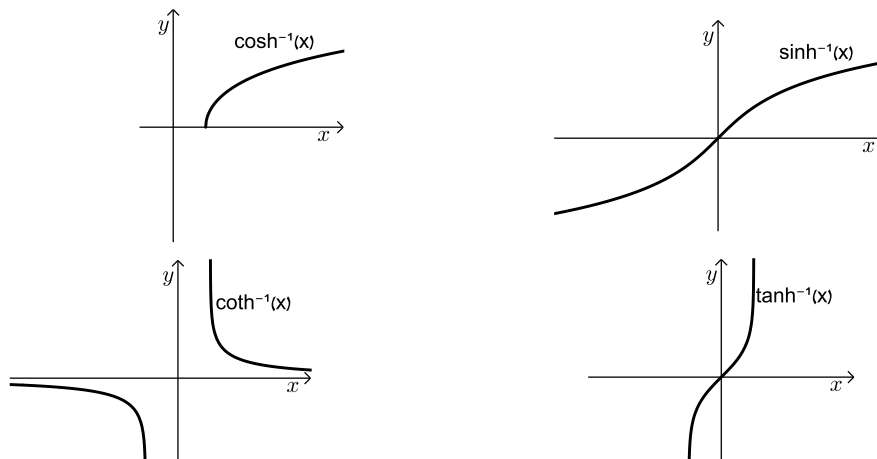
$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

תיאורים גרפיים



הערה

קיים גם סימון של פונקציה הפוכה עם arc , למשל $\sinh^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$.

שאלות

(1) הוכיחו כי $\sinh(\operatorname{arc} \cosh(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$, לכל $|x| > 1$.

(2) הוכיחו כי $\cosh(\operatorname{arc} \tanh(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, לכל $|x| < 1$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות

סיכום כללי

הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות

$(\sinh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\tanh^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, x < 1$
$(\cosh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$	$(\coth^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, x > 1$

שאלות

- 1 גזרו את הפונקציה $f(x) = \ln(\operatorname{arcsinh}(x))$.
- 2 גזרו את הפונקציה $f(x) = \ln(\cosh(\operatorname{arctanh}(x)))$.
- 3 גזרו את הפונקציה $f(x) = \operatorname{arcsinh}(\operatorname{arcosh}(\tan(x)))$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(\cosh^{-1}(\tan x))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x - 1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad (3)$$